



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

-faza locală-

11 februarie 2023

CLASA a VI-A

### SUBIECTUL I ( 7 p)

Aflați  $x$  astfel încât:  $\frac{\frac{x}{2023}}{2} = \frac{2023}{\frac{n}{2}}$ , unde  $n = 2024^2 - 2024 - 2023$ .

### SUBIECTUL II ( 7 p)

Determină toate numerele de forma  $\overline{abba}$ ,  $a \neq b$ , scrise în baza 10, știind că are loc egalitatea:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 22 \cdot \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$$

*Gazeta matematică nr.3/2010.*

### SUBIECTUL al III-lea ( 7 p)

Unghiurile adiacente  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  au bisectoarele  $[OM$  și  $[ON$  incluse în drepte perpendiculare. În același semiplan cu  $[OM$  și  $[ON$  se construiește semidreapta  $[OP$  astfel încât  $m(\sphericalangle BON)$  și  $m(\sphericalangle BOM)$  sunt invers proporționale cu 2 și 3 iar  $m(\sphericalangle BON)$  și  $m(\sphericalangle PON)$  sunt direct proporționale cu 2 și 3. Aflați măsura ( $\sphericalangle POM$ ).

### SUBIECTUL al IV-lea ( 7 p)

Pe o dreaptă se iau, în ordine, punctele  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2023}$ , astfel încât:  $A_0A_1 = 3$  cm,  $A_1A_2 = 7$  cm,  $A_2A_3 = 11$  cm,  $A_3A_4 = 15$  cm și așa mai departe.

- Aflați lungimea segmentului  $[A_0A_{2023}]$ .
- Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $A_0A_{10}$ , aflați  $i \in \mathbb{N}^*$  pentru care  $M \in [A_i, A_{i+1}]$ .

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii*

*Timp de lucru: 2,5 ore*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Nu se acordă punctaj din oficiu.*



## SOLUȚII

### SUBIECTUL I

$n = 2024 \cdot 2023 - 2023$ .....1p

$n = 2023^2$ .....2p

înlocuirea lui  $n$  în relația dată și obținerea  $\frac{x}{2023} \cdot \frac{2023^2}{2} = 2 \cdot 2023$ .....2p

determinarea lui  $x=4$ .....2p.

### SUBIECTUL al II-lea

Se poate scrie  $11(a+b) = 22 \cdot \frac{10a+b}{10b+a}$ .....1p

Obținem  $a+b = \frac{20a+2b}{10b+a}$ .....1p

Cum  $20(10b+a) : (10b+a)$ , atunci înlocuim  $20a+2b = 20(10b+a) - 198b$ .....1p

Deci  $a+b = \frac{20(10b+a)-198b}{10b+a} = 20 - \frac{198b}{ba}$ .....1p

Cum  $a+b \in \mathbb{N}$  atunci  $\frac{198b}{ba} \in \mathbb{N}$ .....1p

Deoarece  $\overline{ba}$  nu divide  $b$  rezulta  $198 : \overline{ba}$ ,  $\overline{ba} \in \{11, 18, 22, 99\}$ .....1p

Dar  $a \neq b$ , rezulta  $\overline{ba} = 18$ ,  $\overline{abba} = 8118$ .....1p

### SUBIECTUL al III-lea

$m(\angle MON) = 90^\circ$ , atunci  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  adiacente suplementare.....1p

$2m(\angle NOB) = 3m(\angle MOB) =$ .....1p

$m(\angle NOB) = 54^\circ$ ,  $m(\angle MOB) = 36^\circ$  .....2p

$m(\angle NOB) = 2k$ ,  $m(\angle NOP) = 3k$  .....1p

$m(\angle NOP) = 81^\circ$  .....1p

$m(\angle MOP) = 9^\circ$  .....1p



SUBIECTUL al IV-lea

a)  $A_0A_{2023} = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{2022}A_{2023} = 3+7+11+15+\dots + A_{2022}A_{2023}$

$$A_0A_1 = 3$$

$$A_1A_2 = 3+4 \cdot 1$$

$$A_2A_3 = 3+4 \cdot 2$$

$$A_3A_4 = 3+4 \cdot 3.$$

.....

$$A_{2022}A_{2023} = 3+4 \cdot 2022 \dots\dots\dots 1p$$

$$A_0A_{2023} = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 2022) + 3 \cdot 2023 = 8187081 \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

b)  $A_0A_{10} = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 3 \cdot 10 = 210 \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$

$$A_0M = MA_{10} = \frac{(A_0A_{10})}{2} = 105 \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$M \in [A_i, A_{i+1}] \Rightarrow A_0A_i \leq A_0M \leq A_0A_{i+1} \dots\dots\dots 1p$$

$$2i \cdot (i - 1) + 3i \leq 105 \leq 2i(i + 1) + 3(i + 1)$$

$$i \cdot (2 \cdot i + 1) \leq 105 \leq (i + 1) \cdot (2 \cdot i + 3). \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Pentru } i = 7 \Rightarrow A_0A_7 = A_0M \Rightarrow M = A_7 \dots\dots\dots 1p$$